

Magnétostatique dans le vide

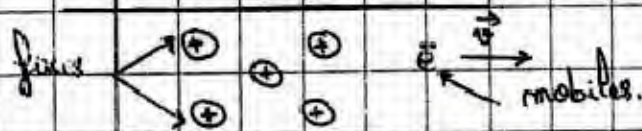
Les champs magnétiques. Parce que les sources de ces champs sont connues, il existe deux sources possible pour les champs magnétiques : d'une part, les courants électriques, d'autre part la matière (im) aimantée. Dans cette partie, on s'étudiera les propriétés des champs, induction et potentiel magnétique créés par différentes distributions de courant.

I. Description du Courant électrique - Rappel

1. Courant électrique

C'est le mouvement d'ensemble des champs électrostatiques, dans un conducteur, on distingue deux types de porteurs de charges : les porteurs de charges fixes et porteurs de charges mobiles.

Exemple : Métal (Cuivre) on trouve :



Les ions sont fixes de densité ρ_f . Les électrons sont mobiles de densité ρ_m .

La densité totale de charge est $\rho = \rho_m + \rho_f$.

ρ : la densité de charge contenue dans l'unité de volume

$$\rho = \frac{dQ}{dV}$$

dQ étant la charge contenue dans dV .

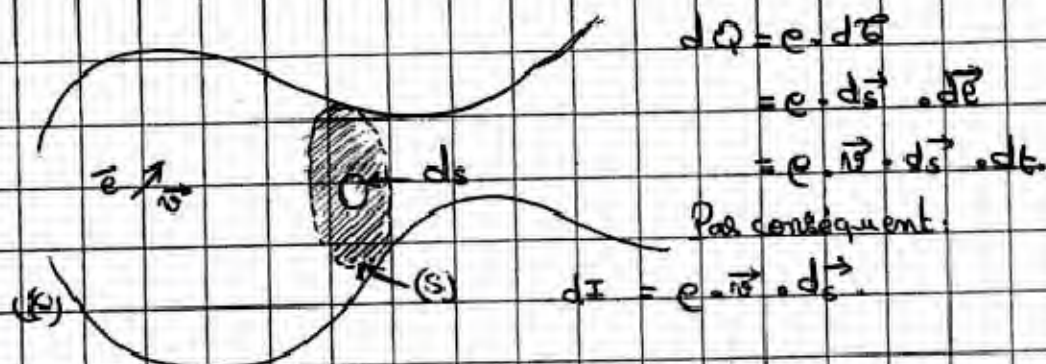
Soit n le nombre d'électrons par unité de volume :

$$\rho_m = n(-e) = -ne \quad \text{avec} \quad e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

2. Densité de courant - Intensité du Courant

Soit un conducteur parcouru par un courant, l'intensité de courant I est défini par $I = \frac{dQ}{dt}$

dQ étant la charge totale traversant la surface S pendant dt



ds : une surface élémentaire de S

$d\vec{s}$: déplacement des porteurs de charges pendant dt

\vec{v} : vitesse des porteurs de charges traversant ds

dI : le courant traversant ds .

La densité de courant est: $\vec{J} = e \vec{v}$ d'où: $dI = \vec{J} \cdot d\vec{s}$

Par conséquent l'intensité

3. Equation de la conservation de la charge

La conservation de la charge électrique est un principe physique qui exprime l'invariance de la charge électrique d'un système isolé. La charge électrique ne peut être échangée avec un autre système.

On dit qu'il s'agit d'une grandeur conservatrice. ce principe de conservation de la charge est également à la base de la loi des nœuds en électrocinétique.

si \vec{J} désigne le vecteur densité volumique de courant et e la densité volumique de charge. l'équation de conservation de la charge s'écrit

$$\text{div } \vec{J} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0 \text{ ou bien } \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0$$

En effet, on considère un volume V délimité par une surface fermée S . La conservation de la charge implique que la variation de la charge électrique contenue dans V est égale à l'opposé de Flux de la charge qui traverse la surface fermée S cela s'écrit:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V e \, dV = - \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Car $\rho = \frac{dQ}{d\tau} \Rightarrow dQ = \rho d\tau d\epsilon$

$$I = \int \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint dQ = \frac{d}{dt} \iiint \rho d\tau = - \iint \vec{j} \cdot d\vec{\epsilon}$$

Le théorème de Green. Or, cela nous donne pas une surface S

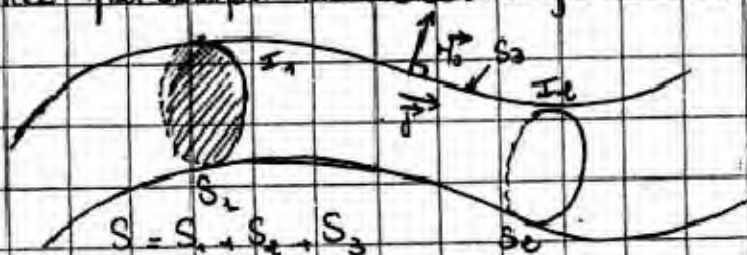
Paradoxe:

$$\iint \vec{j} \cdot d\vec{\epsilon} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d\tau \text{ d'où } \iiint \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \right\} d\tau = 0$$

Conséquence:

En régime stationnaire $\left(\frac{d}{dt}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$.

\vec{j} est à flux conservatif ainsi en intégrant sur une surface fermée par exemple un morceau de fil conducteur, on obtient



$$\iint \vec{j} \cdot d\vec{\epsilon} = 0 \text{ ceci donne } \iint_{S_1} \vec{j} \cdot d\vec{\epsilon} + \iint_{S_2} \vec{j} \cdot d\vec{\epsilon} + \iint_{S_3} \vec{j} \cdot d\vec{\epsilon} = 0$$

Par la suite:

$$\iint_{S_1} \vec{j} \cdot (\vec{n}) d\epsilon + \iint_{S_2} \vec{j} \cdot (\vec{n}) d\epsilon = 0$$

$$\iint_{S_1} \vec{j} \cdot \vec{n} d\epsilon = \iint_{S_2} \vec{j} \cdot \vec{n} d\epsilon$$

Par conséquent: $I_1 = I_2$

II. Champ d'induction magnétique:

1. Expériences pour la mise en évidence de \vec{B} .

a. Expérience d'Oersted

Soit une aiguille aimantée (boussole) en équilibre et orientée par le champ magnétique terrestre.

Lorsqu'un courant I passe dans un fil conducteur placé au-dessus de l'aiguille, elle tourne jusqu'à une nouvelle position d'équilibre. Si le courant est supprimé, l'aiguille revient à la position initiale. Si on inverse le sens du courant I , l'aiguille tourne en sens inverse.

On peut conclure que le passage du courant I dans le fil

modifie les propriétés de l'espace voisin du fil. cette modification est traduite par les forces qui obligent la boussole à tourner, cette expérience trace le lien entre le courant électrique et le champ magnétique

b. Expérience de Rowland

Une distribution des charges

Dans le champ magnétique une distribution des charges immobiles crée une modification de l'espace qui se traduit par un champ électrostatique \vec{E} , de m au voisinage des particules chargées en mouvement on peut définir un champ d'induction magnétique noté \vec{B} .

\vec{B} est à l'origine de la déformation de l'espace constatée par la rotation de l'aiguille aimantée. l'unité de \vec{B} dans le système international est le Tesla; on trouve également dans le système CGS le Gauss (G).

$$1\text{T} = 10^4\text{G}$$

Remarques:

$B_{\text{Terre}} \approx 0,5 \text{ Gauss} \approx 20 \mu\text{T}$

le champ magnétique d'une étoile $B = 10^3\text{T}$

un aimant donne une induction de l'ordre de 10 à 100 Gauss

un champ magnétique d'une tache solaire $B = 1\text{kG}$

b. Lignes de Champ

Définition une ligne de champ ou ligne d'induction est définie comme étant une ligne tangente en tout ses points au vecteur \vec{B} .

Remarque:

* deux lignes de champ ne peuvent se couper

* dans le cas d'un fil conducteur se déplaçant les lignes de champ sont des cercles centrés sur le fil et dont le sens des ponts du sens du courant

Considérons un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ le long d'une ligne de champ magnétique C .

Le fait que le champ magnétique \vec{B} soit en tout point de C parallèle à $d\vec{l}$, alors $\vec{B} \times d\vec{l} = \vec{0}$

En Coordonnées Cartésiennes: $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ et les lignes de champ sont calculées en résolvant l'équation

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}$$

En Coordonnées Cylindriques: $d\vec{l} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$
Les lignes de champ sont calculées en résolvant l'équation suivante:

$$\frac{dr}{B_r} = r \frac{d\theta}{B_\theta} = \frac{dz}{B_z}$$

En Coordonnées sphériques:

$$d\vec{l} = dr\vec{e}_r + r \sin\theta d\phi\vec{e}_\phi + r d\theta\vec{e}_\theta$$

$$\frac{dr}{B_r} = r \sin\theta \frac{d\phi}{B_\phi} = \frac{r d\theta}{B_\theta}$$

Soit maintenant un contour: courbe fermée

On appelle tube de champ s'appuyant sur le contour l'ensemble des lignes de champ passant par ce contour.

tout au long de ce tube de champ le flux magnétique est conservé.

3. Expression du champ magnétique:

a. champ d'induction magnétique crée par une seule charge en mouvement.

On considère une charge Q se déplaçant avec une vitesse \vec{v} et se trouvant à l'instant t au point P . cette charge crée au point M un champ d'induction $\vec{B}(M)$, proportionnelle à Q , à \vec{v} et à $\frac{1}{r^2}$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Q \vec{v} \wedge \vec{u}}{r^2} \quad \text{Expression déduite de l'expérience}$$

μ_0 : perméabilité du vide ($\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$).
la capacité "casser papier"

$\vec{u} = \frac{\vec{r}_{PM}}{r} \Rightarrow$ vecteur constant de la direction \vec{PM} .
($\vec{r}_M, \vec{v}, \vec{u}$) forme un trièdre direct.

Les phénomènes électrique et magnétique sont liés alors

$$\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$$

c étant la vitesse de la lumière

b. Champ d'induction magnétique créé par un ensemble de charge en mouvement.

Considérons n particules de charge q_i situées en des points P_i et de vitesse v_i . En conséquence du principe de superposition, le champ magnétique créé en un point M est la somme vectorielle des champs créés par chaque particule et vaut

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\vec{v}_i \wedge \vec{P_i M}}{\|\vec{P_i M}\|^3}$$

Si le nombre de particules est très grand dans un volume V donné, il est avantageux d'utiliser une description continue. Il faut donc définir les distributions continues comme nous l'avons fait en électrostatique. Le passage à la limite continue consiste à assimiler tout volume élémentaire dV , situé autour d'un point B' quelconque de la distribution de charge en mouvement à une charge dq animée d'une vitesse moyenne \vec{v} . Le champ magnétique résultant s'écrit alors

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dq \frac{\vec{v} \wedge \vec{P B'}}{\|\vec{P B'}\|^3}$$

Loi de Biot et de Savart.

Émergence de la Loi

$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

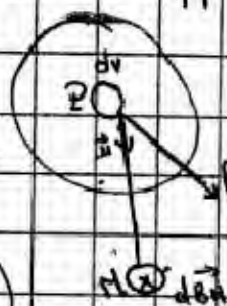
n : nombre de charge mobile par unité de volume.

v : la vitesse de mouvement de particule

q : la charge élémentaire, rapporteur de charge

Le champ créé en M par cette ensemble de charges:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{q\vec{v} \wedge \vec{r}}{r^3} dV$$



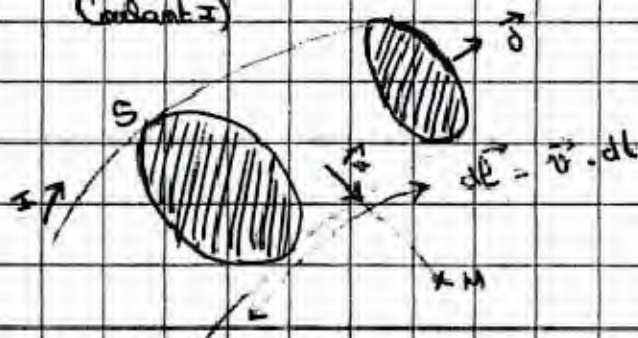
pour une charge

Par un nombre de porteur de charge $n dV$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q\vec{v} \wedge \vec{u}}{r^3} \quad \text{ndv} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{r} \wedge \vec{u}}{r^3} \cdot dv$$

Pour tout le volume $\vec{B}(\vec{r}) = \iiint \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{r} \wedge \vec{u}}{r^3} \cdot dv$

Cas de courants filiformes (circuit filiforme parcouru par un courant I)



$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int j \cdot S \quad \text{et} \quad dv = S \cdot dl$$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \vec{j} \wedge \vec{u} \cdot S \cdot dl$$

$$\text{Or, } \vec{j} \wedge \vec{u} \cdot S \cdot dl = \vec{j} \cdot S \cdot dl \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = \vec{j} \cdot dl \cdot S \wedge \vec{u}$$

Si on prend dl dans le même

Sens que I alors $\vec{j} \parallel d\vec{l} \Rightarrow \vec{j} \cdot d\vec{l} = j \cdot dl$

$$\text{et } \vec{j} \cdot dl \cdot S \wedge \vec{u} = j \cdot S \cdot dl \wedge \vec{u} = I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{u}$$

Induction $d\vec{B}$ due par un élément $d\vec{l}$ parcouru par un courant I

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{u}$$

Le module B dépend de l'intensité du courant, de la géométrie du circuit et de sa position par rapport au point m considéré.

La loi de Biot et de Savart et Sult applicable dans le cas des circuits des formes géométriques simples.

b. Expressions du champ pour différents types de distribution

- 2) Distribution linéique

Si B est crée par une distribution linéique d'après la loi de Biot Savart.

$$dB(\vec{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Par conséquent,

$$\vec{B}(\vec{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_M \frac{I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Distribution Surfacique

Soit l'élément de courant j_s , la densité surfacique du courant. Si B est crée par une distribution surfacique, on remplace dans son expression $I \cdot d\vec{l}$ par $j_s \cdot d\vec{s}$ d'où le champ élémentaire crée par $j_s \cdot d\vec{s}$ est

$$d\vec{B}(\vec{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{j_s \cdot d\vec{s} \wedge \vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{s}$$

Par conséquent,

$$\vec{B}(\vec{M}) = \iint_S \frac{d\vec{s} \wedge \vec{r}}{r^3} \cdot j_s \cdot d\vec{s}$$

Distribution Volumique

Soit l'élément de courant ($j \cdot dV$). Si B est crée par une distribution volumique, on remplace dans son expression $I \cdot d\vec{l}$ par $j \cdot dV$ d'où le champ élémentaire crée par $j \cdot dV$ est:

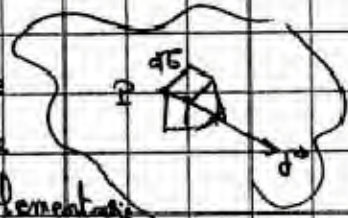
$$d\vec{B}(\vec{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{j \cdot dV \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Par conséquent,
$$\vec{B}(\vec{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{dV \wedge \vec{r}}{r^3} \cdot j$$

j : la densité volumique du courant défini en P.

dV : l'élément de volume défini en P.

M est le point où le champ B est calculé.



C. Règles pratiques pour déterminer le sens de \vec{B}

C.1 - Règle des trois doigts de la main droite.

Doigt I ou $d\vec{l}$

Index \vec{r} ou \vec{r}'

Majeur \vec{B}

C.2 Règle de Benhamme d'Ampère.

Le courant I entre par les pieds et sort par la tête. Le benhomme regarde le point M, le sens de B est celui indiqué par la main gauche.

C.3 Règle de la vis-bouchon de Maxwell

On tourne le tire-bouchon dans le sens de I , le tire-bouchon s'enfonce dans le sens de B .

III. Théorème d'Ampère

La loi de Biot et de Savart est utilisée facilement pour les circuits de forme simple dans le cas de circuit de forme complexe on utilise souvent le théorème d'Ampère

1. Champ d'excitation magnétique H .

Le champ d'excitation H prend compte l'influence du milieu magnétique sur les grandeurs. Il s'exprime en Ampère par mètre dans le vide où dans l'air l'induction et l'excitation magnétique sont collinéaires et de même sens. $B = \mu_0 H$ au sein d'un matériel magnétique il en va de même, mais on fait intervenir la perméabilité relative du matériau.

$$B = \mu_0 \mu_r H$$

2. Énoncé du théorème

La circulation de B au long d'une courbe C quelconque orientée est formée appelée contour d'Ampère est égale à μ_0 fois la somme algébrique des courants traversant la surface délimitée par C .

$$\oint_C B \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot I_{\text{inter}}$$

La circulation du vecteur H le long d'une courbe fermée quelconque est égale à la somme algébrique des courants traversant la surface S sur le contour C

$$\oint_C H \cdot d\vec{l} = \sum_j \pm I_j$$

Sera pris positivement si il est dans le sens de la normale à la surface (Règle de Tire-bouchon par rapport au sens de parcours du contour C)

Le courant

Remarque :

Ces relations fondamentales sont l'équivalent pour le champ électrostatique
Pour le théorème de Gauss, ce qui compte est la somme algébrique des
Sources par exemple Si deux courants de même direction traversent la
surface totale.

b- Forme locale du théorème d'Ampère :

D'après le théorème d'Ampère on a :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{R} = \mu_0 I_{enc} \\ = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

$$\text{or } \oint_{(S)} \vec{rot}(\vec{B}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

$$\text{Ceci donne : } \oint_S (\vec{rot}(\vec{B}) - \mu_0 \vec{j}) \cdot d\vec{s} = 0 \\ \text{par suite } \forall S \Rightarrow \boxed{\vec{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}}$$

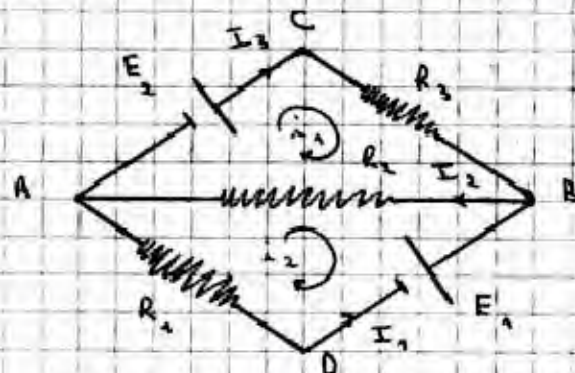
Cette équation est appelée : forme locale du théorème d'Ampère



Les inconnues sont les courants fictifs.

La résolution de ce système nous permet de déterminer les courants de Maxwell qui sont liés au courant réel.

Exemple :



Les courants de Maxwell i_1 et i_2 sont liés au courant réel I_1 et I_2 et I_3 .

$$i_1 = I_3 \text{ pour la branche ACB}$$

$$i_1 - i_2 = I_2 \text{ " " " AB}$$

$$i_2 = -I_1 \text{ " " " ADB}$$

Les équations des mailles :

$$\rightarrow \text{pour ACB} \quad R_3 i_1 + R_2 (i_1 - i_2) = E_2$$

$$\rightarrow \text{pour ABD} \quad R_2 (i_2 - i_1) + R_1 i_2 = -E_1$$

$$\text{On peut écrire } \begin{cases} (R_3 + R_2) i_1 - R_2 i_2 = E_2 \\ -R_2 i_1 + (R_1 + R_2) i_2 = -E_1 \end{cases}$$

C'est un système de Cramer qui donne :

$$i_1 = \frac{\Delta i_1}{\Delta} \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{\Delta i_2}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (R_3 + R_2) & -R_2 \\ -R_2 & (R_1 + R_2) \end{vmatrix}$$

$$\Delta i_1 = \begin{vmatrix} E_2 & -R_2 \\ -E_1 & (R_1 + R_2) \end{vmatrix}$$

$$\Delta i_2 = \begin{vmatrix} (R_3 + R_2) & E_2 \\ -R_2 & -E_1 \end{vmatrix}$$

Application numérique :

$$R_1 = 10 \Omega \quad R_2 = 5 \Omega \quad E_2 = 10 \text{ V}$$

$$R_2 = 10 \Omega \quad E_1 = 40 \text{ V}$$

$$i_1 = -1 \text{ A} \quad \text{et} \quad i_2 = -5/2 \text{ A}$$

2 - Théorème de Biot-Savart : Cette méthode est une forme particulière de la loi des courants exprimée en terme de potentiel.

c - choix de la courbe fermée d'Ampère :

Le calcul de $\oint_{\text{courbe}} \vec{B} \cdot d\vec{l}$ doit être facile c'est pourquoi on doit choisir la courbe (C) de façon à ce que \vec{B} soit tangente ou perpendiculaire à (C). D'autre part le module de \vec{B} doit être constant le long de (C) ou nul sur certaine partie de (C).

3 - Mise en oeuvre du théorème d'Ampère :

Pour calculer $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ il faut connaître d'avance le champ \vec{B} par les règles de symétrie et d'invariance, ces propriétés sont fondamentales car elles permettent de simplifier considérablement le calcul de champ magnétique. Du fait que ce champ soit un effet créé par un courant, il contient les informations sur les causes qui lui ont données les sens, ceci se traduit par la présence des certaines symétrie et d'invariance si les sources de courant en possèdent également, ainsi si l'on connaît les propriétés de symétrie de la densité du courant on pourra connaître celle du champ magnétique.

a - Vecteurs et pseudo-Vecteurs.

Un vecteur polaire ou Vrai vecteur est un vecteur dont la direction, le module et le sens sont parfaitement déterminés.

Ex : vitesse d'une particule, champ électrostatique, densité du courant.

Un vecteur axial ou pseudo-Vecteur est un vecteur dont le sens est défini à partir d'une convention d'orientation d'espace et dépend donc de cette convention.

Ex : Champ magnétique, la normale à la surface.

Cette différence provient du produit vectoriel : le sens du produit vectoriel dépend de la convention d'orientation de l'espace. Le produit vectoriel de deux vecteurs (respectivement pseudo-vecteurs) est un pseudo vecteur (respectivement vrai vecteur) tandis que celui d'un vrai vecteur par un pseudo vecteur est un pseudo vecteur. Orienter l'espace provient à déterminer le sens par la règle.

de tueur ou celle du bonhomme d'Ampère.

b - Règles de symétrie :

Plan de symétrie (P) : si (S) admet un plan de symétrie (P), un effet à caractère vectoriel est contenu dans le plan alors que un effet à caractère pseudo vectoriel est perpendiculaire.

Plan d'Antisymétrie (P') : si par symétrie à un plan (P') (S) est transformé en moins (S) en tout point de ce plan. Un effet est caractère vectoriel est perpendiculaire au plan, alors qu'un effet à caractère pseudo vectoriel est contenu dans ce plan.

c - Règles d'invariance :

Invariance par translation : si (S) est invariant par translation parallèle à un axe (oz par exemple) les effets ne dépendent pas de z .

Symétrie axiale : si (S) est invariant par toute rotation autour d'un axe alors les effets ne dépendent pas de l'angle de rotation.

Symétrie cylindrique : Si (S) est invariant par translation le long de l'axe (oz) et rotation autour de ce même axe, alors ces effets exprimés en coordonnées cylindriques ne dépendent que de rayon.

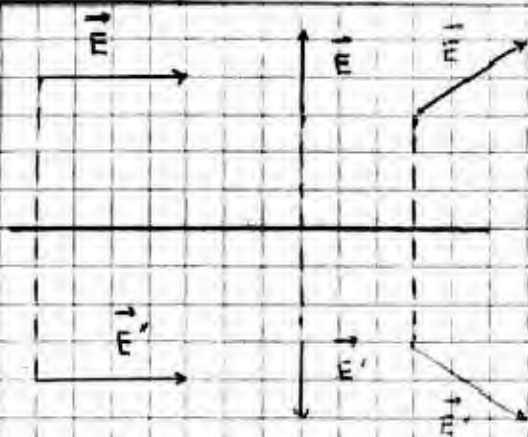
Symétrie sphérique : Si (S) est invariant dans toute rotation autour d'un point fixe O , alors ces effets exprimés en coordonnées sphériques ne dépendent que de rayon r .

d - Conséquences des règles d'invariance et de plans de symétrie :

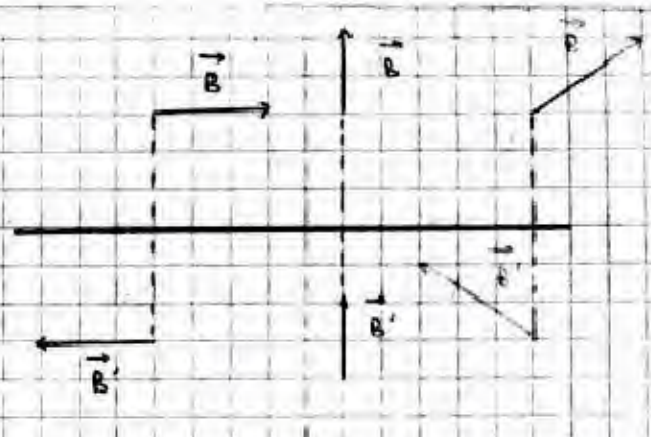
Les vecteurs et pseudo-vecteurs se transforment de la même manière dans une rotation ou translation. Il n'en est pas de même dans la symétrie par rapport à un plan. Dans cette transformation :

→ Un vecteur est transformé en son symétrique

→ Un pseudo-vecteur est transformé en l'opposé de son symétrique.



Transformation d'un vecteur par symétrie par rapport à un plan



Transformation d'un pseudo vecteur par symétrie par rapport à un plan.

Comme le champ \vec{B} est un pseudo vecteur alors :

- Si (P) est un plan de symétrie d'une distribution J alors (P) est un plan d'Antisymétrie pour \vec{B}
- Si (Q) est un plan d'Antisymétrie de distribution J alors (Q) est un plan de symétrie pour \vec{B}
- Si \vec{J} est invariant par rotation autour d'un axe \vec{B} , l'est aussi
- si \vec{J} est poloidal (portée par \vec{e}_r et/ou \vec{e}_θ) alors \vec{B} est toroidal (portée par \vec{e}_ϕ)
- si \vec{J} est toroidal alors \vec{B} est poloidal.
- Si le système de courant possède un plan de symétrie alors \vec{J} est contenu dans ce plan alors que \vec{B} est perpendiculaire.

IV - le potentiel vecteur :

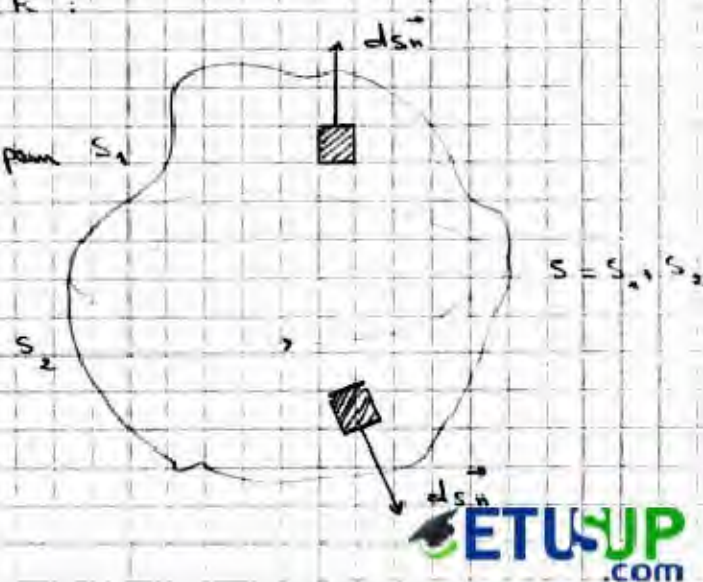
1 - Conservation du flux de \vec{B} :

Considérons une surface fermée

(V) fermée et orientée, c-à-d pour S_1

laquelle on peut définir localement un élément de surface $d\vec{s} = ds \cdot \vec{n}$

dont le vecteur normal est orienté vers l'extérieur (par convention)



• Surface fermée vaut :

Le flux du champ magnétique à travers cette $\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

Ce flux est exprimé en Weber (wb), ceci explique que ce qui entre d'un côté ressort de l'autre ~~côté~~ côté. or $\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \text{div } \vec{B} d\tau = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{B} = 0$

V : le volume limité par la surface S

La conservation du flux magnétique est une propriété très importante et montre une différence fondamentale entre le champ magnétique et le champ électrostatique, nous avons vu avec le théorème de Gauss que le flux du champ électrostatique dépend des charges électriques contenues à l'intérieur de la surface.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

2 - Potentiel vecteur \vec{A} :

Nous avons vu en électrostatique que le champ dérive d'un potentiel V tel que $\vec{E} = -\text{grad}(V)$. Un tel potentiel scalaire n'existe pas en magnétisme, il existe par contre un champ de vecteur \vec{A} : point duquel le champ magnétique peut être déduit par la relation $\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$

En effet : on sait que $\text{div } \vec{B} = 0$ et que $\text{div}(\text{rot}) = 0$. Alors il existe un champ \vec{A} tel que $\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$

\vec{A} : est appelé potentiel vecteur

$\vec{A} + \text{grad}(f)$ est également un potentiel vecteur

$$\text{car : } \text{rot}(\vec{A} + \text{grad}(f)) = \text{rot}(\vec{A}) + \text{rot}(\text{grad}(f)) = \text{rot}(\vec{A}) = \vec{B}$$

$$\text{avec } \text{rot}(\text{grad}) = 0$$

On dit que \vec{A} est défini à un grad près

3 - Equation de Poisson en \vec{A} :

\vec{A} n'est pas unique

Pour fixer le choix de ce vecteur on impose une contrainte supplémentaire

sur \vec{A} appelé jauge de Coulomb : $\text{div } \vec{A} = 0$

On a donc comme équations :

$$\begin{cases} \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \\ \text{div}(\vec{A}) = 0 \quad \text{car } \text{div}(\text{rot}) = 0 \\ \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \end{cases}$$

La dernière équation constitue la forme locale du théorème d'Ampère, ce système d'équation donne le résultat suivant :

$$\text{rot}(\text{rot}(\vec{A})) = \text{grad}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

d'où : $\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{j} = 0$ c'est l'équation de Poisson

4 - Expression du potentiel vecteur \vec{A} :

Par analogie avec l'électrostatique, la résolution de l'équation de Poisson en magnétostatique permet de déterminer l'expression du potentiel vecteur \vec{A} qui est :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j} d\tau}{PM} \quad \text{pour une distribution volumique}$$

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\vec{j}_s dS}{PM} \quad \text{pour une distribution surfacique}$$

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I} dl}{PM} \quad \text{pour une distribution linéique}$$

5 - Propriétés de symétrie et d'invariance par \vec{A} :

\vec{A} est un vrai vecteur alors que \vec{B} est un pseudo vecteur par conséquent :

\vec{A} est symétrique par rapport à un plan de symétrie.

\vec{A} est antisymétrique par rapport à un plan d'antisymétrie.

Les règles d'invariance de \vec{A} sont les mêmes que celle de \vec{B} .

VI - Récapitulation :

1 - Résumé : En résumé, le champ magnétostatique peut être calculer selon 3 façons différentes :

→ loi de Biot et le savant : Elle n'est pratique que lorsqu'on sait faire l'addition des champs \vec{B} créé par un petit élément du circuit (souvent des circuits filiformes)

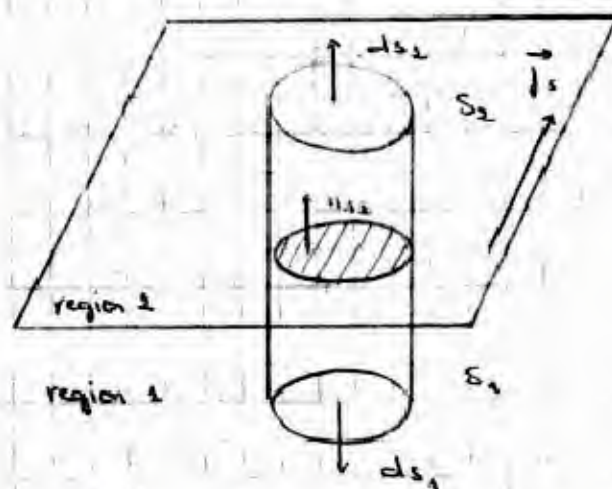
→ la conservation du flux : à n'utiliser que si l'on connaît déjà son expression dans une autre région de l'espace

→ le théorème d'Ampère : Il faut être capable de calculer la circulation du champ sur un contour choisi : cela nécessite une symétrie relativement simple des courants

2 - Exemple de calcul du champ magnétique :

a - Conservation du flux :

Soit une distribution surfacique de courant \vec{j}_s séparant l'espace en deux régions 1 et 2 comme le montre la figure ci-dessous :



Considérons une surface fermée fictive traversant la nappe de courant.

la conservation du flux magnétique à travers cette surface s'écrit :

$$\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

où S_2 de la surface latérale : lorsqu'on fait tendre cette surface vers 0

(S_1 tend vers S_2) on obtient : $\iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

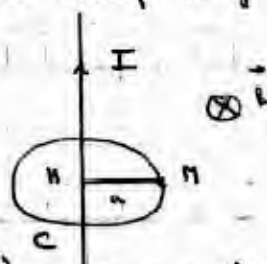
$$\Rightarrow \iint_{S_1=S_2} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} dS = 0$$

Puisque $d\vec{s}_2 = -d\vec{s}_1 = \vec{n}_{12} dS$. ce résultat montre que :

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n}_{12} = 0$$

b - Théorème d'Ampère :

On va calculer le champ magnétique d'un fil infini par application du théorème d'Ampère



La courbe d'Ampère est une ligne de champ : cercle (C) de rayon r

\vec{B} est constante sur le cercle.

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_C B \, dl = B \int_C dl = B \, 2\pi a$$

d'après le théorème d'Ampère $\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Diapo
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..